# HM 3 Übung Blatt 1

## Lin DGL's 1. Ordnung

| | 1-dimensional (S. 231 ff) Wdh | n-dimensional (S. 234 ff) NEU |
|---|---|---|
| AWP | $x'(t)+a(t)x(t)=f(t)$, $x(t_0)=x_0$ | $\dot{\vec{x}}(t)=A(t)\vec{x}(t)+\vec{b}(t)$, $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ |
| 1) homog DGL<br>homog Lsg | $x'(t)+a(t)x(t)=0$<br>$x_h(t)=ce^{-A(t)}$, $A(t)=\int a(t)dt$ | $\dot{\vec{x}}(t)=A(t)\vec{x}(t)$<br>$\vec{x}_h(t)=X(t)\vec{c}$<br>$X(t)$ Fundamentalmatrix, enthält n lin unabh homog Lösungen<br>(check mit Wronski-Det: $W(t)=\det X(t)\neq 0$ für ein $t\in[a,b]$) |
| 2) partikuläre Lösung<br>(eine spezielle Lösung) | zB $x_p(t)$ über Variation der Konst oder Ansatz vom Typ d. rechten Seite NEU | z.B $\vec{x}_p(t)$ über Var. d. Konst → Blatt 2 |
| 3) allg Lsg | $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$ | $\vec{x}(t)=\vec{x}_h(t)+\vec{x}_p(t)$ |
| Lösungsformel | $x(t)=e^{-A(t)}\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(\xi)}f(\xi)d\xi\right)$,<br>$A(t)=\int_{t_0}^{t}a(\xi)d\xi$ | $\vec{x}(t)=X(t)\left[\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)d\xi+\vec{c}\right]$<br>$\vec{c}=X^{-1}(t_0)\vec{x}_0$ |

Blatt 1:
- → Ansatz Typ d r. S.
- → 2 dim lin DGL
- → Liouville-Formel (Berechnung Wronski-Det; ohne X zu kennen!)
- zus → versch Vor üben: Formel, VdK, TdrS

## Ansatz vom Typ d. rechten Seite:

- → um partikuläre Lösung zu finden (nicht allg Lsg!)
- → nur für lin DGL's (m-ter Ord) mit konstanten Koeffizienten $a_k(t)=\text{const}$

$f(t)$ Polynom k-ter Ord: $f(t)=p_k(t)$ $\Rightarrow$ $x_p(t)$ ist allg Polynom k-ter Ord
$x_p(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots+\alpha_k t^k=q_k(t)$

$f(t)=e^{at}p_k(t)$ $\Rightarrow$ $x_p(t)=e^{at}q_k(t)$

$f(t)=\sin(bt)\,p_k(t)$ $\Rightarrow$ $x_p(t)=\sin(bt)q_k(t)+\cos(bt)\,\tilde{q}_k(t)$
analog beim $\cos(bt)$

$f(t)=e^{at}\sin(bt)p_k(t)$ $\Rightarrow$ $x_p(t)=e^{at}\left[\sin(bt)q_k(t)+\cos(bt)\tilde{q}_k(t)\right]$

usw

**H1.1**

$$4x'(t) + 4x(t) = f(t) \qquad x(0) = 1/2$$

Standardform $\Longrightarrow$

$$(*) \quad x'(t) + x(t) = \frac{1}{4} f(t) \qquad x(0) = 1/2$$

1) Homog Lsg:

$$x_h(t) = c e^{-A(t)}, \quad A(t) = \int 1 \, dt = t$$

$$\Rightarrow x_h(t) = c e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) Part. Lsg:

a) $\frac{1}{4} f(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t} + t e^{-2t}\right) = \frac{1}{4} e^{-2t}(1+t) = e^{-2t}\underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{4}\right)}_{\text{Polynom 1. Ord.}}$

Ansatz: $x_p(t) = e^{-2t}(\alpha + \beta t)$

Einsetzen in DGL $(*)$: $x_p'(t) + x_p(t) \overset{!}{=} \frac{1}{4} f(t) \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow -2e^{-2t}(\alpha + \beta t) + \beta e^{-2t} + e^{-2t}(\alpha + \beta t) =$$

$$= -e^{-2t}(\alpha + \beta t) + \beta e^{-2t}$$

$$= e^{-2t}\left[(\beta - \alpha) - \beta t\right] \overset{!}{=} e^{-2t}\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{4}\right) \quad \forall t$$

Koeffvergl: $\beta = -\frac{1}{4}$ $\qquad \alpha = \beta - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x_p(t) = e^{-2t}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} t\right)$$

3) Allg Lsg:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= c e^{-t} + e^{-2t}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} t\right)$$

Bestimme c über AW: $x(0) = c - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1/2 \quad \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t}}$$

Analog für 2b): $\frac{1}{4} f(t) = \frac{1}{4} e^{t} \cos(2t)$

Polynom 0. Ord (also konstanter Vorfaktor)

Ansatz: $x_p(t) = e^{t}\left[\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)\right]$ $\rightarrow$ 7

Einsetzen in DGL $(*)$ mit Koeffvergl: $\alpha = \beta = 1/16$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{16} e^{t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = c e^{-t} + \frac{1}{16} e^{t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right) \quad ; \text{mit AW} \Rightarrow c = \frac{7}{16}$$

$$x(t) = \frac{7}{16} e^{-t} + \frac{1}{16} e^{t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right)$$

**H 1.2**

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{-1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}}_{A(t)}\vec{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{p}(t)}$$

$\vec{p}(t)$ konst.

1) Homog Lsg: $\vec{x}_h(t) = X(t)\,\vec{c}$ mit $X(t)$ Fundamentalmatrix

$\rightarrow$ Ges: 2 lin. unabh. Lösungen der homog DGL.

Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{a} + t\vec{b}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Einsetzen in DGL (homog): $\dot{\vec{x}}_h = \vec{b} \overset{!}{=} A(t)\vec{x}_h(t) = A(t)(\vec{a} + t\vec{b})$

$$\Leftrightarrow \quad (1+t^2)\vec{b} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}(\vec{a} + t\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (1+t^2)b_1 \\ (1+t^2)b_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 t^2 - a_2 - t b_2 \\ a_1 + t b_1 + a_2 t + b_2 t^2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ I) $b_1 + b_1 t^2 \overset{!}{=} (a_1 - b_2)t + b_1 t^2 - a_2 \quad \forall t$

II) $b_2 + b_2 t^2 \overset{!}{=} a_1 + t(a_2 + b_1) + b_2 t^2 \quad \forall t$

Koeffvergl: $\boxed{a_1 = b_2}$, $\boxed{b_1 = -a_2}$

$$\Rightarrow \vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 + t b_1 \\ -b_1 + t b_2 \end{pmatrix}$$

Ges: 2 lin unabh Lösungen d homog DGL:

Wähle $b_1 = 1$, $b_2 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$

Wähle $b_1 = 0$, $b_2 = 1 \Rightarrow \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

Wronski-det: $W(t) = \det(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)) = \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1 \neq 0 \ \forall t$

$\Rightarrow \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ lin. unabh. Lösungen

$\Rightarrow X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ Fundamentalmatrix

2) Allg. Lsg: $\vec{x}(t) = X(t)\left[\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\xi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi + \vec{c}\right]$

$$= X(t)\left[\int \underline{X^{-1}(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi + \vec{c}\right]$$

konst Vektor $\mathbb{R}^2$

da kein AW gegeben

## Invertiere $X(t)$:

vollst. Gaußelimination

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} t & 1 \\ -1 & t \end{matrix}}_{X(t)} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{-1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{matrix}}_{X^{-1}(t)}\right)$$

$\boxed{\text{"üben"}}$

$$\Rightarrow \quad X^{-1}(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

**Tip:** Schnelles Invertieren für 2x2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\int X^{-1}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln|1+t^2| \\ \arctan t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\sqrt{1+t^2} \\ \arctan t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = X(t)\left[\int X^{-1}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln\sqrt{1+t^2} \\ \arctan t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t\ln\sqrt{1+t^2} + \arctan t \\ -\ln\sqrt{1+t^2} + t\arctan t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ c_2 t - c_1 \end{pmatrix}$$

## H1.3) Liouville-Formel:

aus DGL

$$W(t) = W(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\right)$$
$$= W(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)\right) ds\right)$$

a) $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ z.z. $W(t) = e^{-2t}$

$\operatorname{Spur} A(t) = -2 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds = -2t + 2t_0$

$\Rightarrow W(t) = W(t_0)\exp(-2t + 2t_0) = e^{-2t_0} e^{-2t+2t_0} = e^{-2t}$ ✓

b) $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t+1}{t^2+t} & \frac{-t}{t+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ z.z.: $W(t) = t^2 + t$ ; $t > 0$

$\operatorname{Spur} A(t) = \frac{2t+1}{t^2+t} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds = \ln\left|\frac{t^2+t}{t_0^2+t_0}\right|$

$\Rightarrow W(t) = W(t_0)\exp\left(\ln\left|\frac{t^2+t}{t_0^2+t_0}\right|\right) = (t_0^2+t_0)\cdot\left|\frac{t^2+t}{t_0^2+t_0}\right| = t^2+t$

c) $A(t) = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{t}{1+t^2}} & \frac{-1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ $\operatorname{Spur} A(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds = \ln\left|\frac{1+t^2}{1+t_0^2}\right|$

z.z.: $W(t) = 1 + t^2$

$\Rightarrow W(t) = W(t_0)\exp\left(\ln\left|\frac{1+t^2}{1+t_0^2}\right|\right) = (1+t_0^2)\cdot\left|\frac{1+t^2}{1+t_0^2}\right| = 1+t^2$

## H 1.4 z)

$$x'(t) + 2x(t) = e^t \qquad x(0) = 1$$

**Var 1:** Lösungsformel

$$x(t) = e^{-A(t)}\left(1 + \int_0^t e^{A(\xi)} e^{\xi}\, d\xi\right) \quad ; \; A(t) = \int_0^t 2\, d\xi = 2t$$

$$= e^{-2t}\left(1 + \int_0^t e^{3\xi}\, d\xi\right) = e^{-2t} + e^{-2t}\left(\frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}$$

**Var 2:** Homog, Partlsg mit VdK

$$x_h(t) = c e^{-A(t)} \quad , \quad A(t) = \int 2\, dt = 2t$$

$$= c e^{-2t}$$

Ansatz $x_p(t) = c(t) e^{-2t} \Rightarrow \dot{x}_p(t) + 2x_p(t) = c' e^{-2t} - 2c e^{-2t} + 2c e^{-2t} =$

$$= c' e^{-2t} = e^t$$

$$\Rightarrow c'(t) = e^{3t} \quad \Rightarrow c(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

Allglsg $\Rightarrow x(t) = c e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$

AW $\quad x(0) = c + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$$

**Var 3:** Homog, Partlsg mit TdrS

$$x_h(t) = c e^{-A(t)} = c e^{-2t} \qquad \text{da } A(t) = \int 2\, dt = 2t$$

Ansatz: $x_p(t) = \alpha e^t$

$$\Rightarrow x_p'(t) + 2x_p(t) = \alpha e^t + 2\alpha e^t = 3\alpha e^t \overset{!}{=} e^t \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x(t) = c e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$$

$$x(0) = c + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$$

Einsetzen in DGL (*)

$$x_p'(t) + x_p(t) = e^t \alpha \cos(2t) + e^t \beta \sin(2t) + 2e^t \beta \cos(2t) - 2e^t \alpha \sin(2t)$$
$$+ e^t \alpha \cos(2t) + e^t \beta \sin(2t)$$
$$= e^t \cos(2t)\underline{[2(\alpha+\beta)]} + \underline{e^t \sin(2t)[2(\beta-\alpha)]}$$
$$\overset{!}{=} \underline{\frac{1}{4}} e^t \cos(2t) \qquad \forall t$$

Koeffvergl.: $\alpha = \beta$

$\alpha + \beta = 2\beta = \frac{1}{8} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{16}$

Einsetzen der AW

$$x(0) = c + \frac{1}{16} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$