S. 215 f

1. Aufgabe

Gegeben sei die Raumkurve mit der Parametrisierung

$$\gamma: \qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man bestimme:

a) Die Bogenlänge der Kurve in Abhängigkeit von t mit $t_0 = 0$.

b) Das begleitende Dreibein.

c) Die Schmiegeebene im Punkt $\vec{x}(t_0)$ mit $t_0 = 0$.

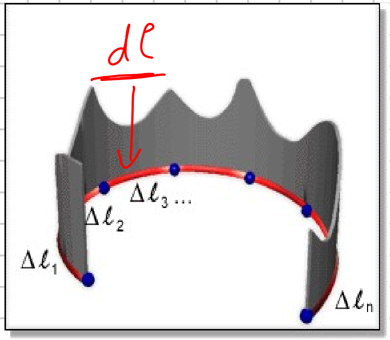
d) Die Krümmung der Kurve.

Tipp: Bogenlänge / Geschwindigk. $\dot{\vec{x}}$

Dreibein / Krümmung / Schmiegebene $\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}$

Torsion $\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 36t \end{pmatrix}$$



a) Bogenlänge $s(t) = \int_\gamma 1 \underbrace{ds}_{\text{skalares Linienelement}} = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\dot{\vec{x}}(\tau)\| \, d\tau}_{ds}$

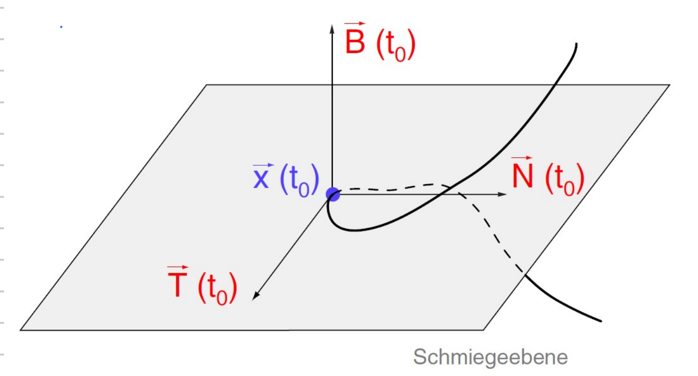
$$= \int_0^t \sqrt{1 + 36\tau^2 + 18^2 \tau^4} \, d\tau = \int_0^t \sqrt{(1+18\tau^2)^2} \, d\tau$$

$$= \int_0^t |\underbrace{1 + 18\tau^2}_{>0 \ \forall \tau}| \, d\tau = \left[\tau + 6\tau^3\right]_0^t = \underline{\underline{6t^3 + t}}$$

Anschauliche Erklärungen rund im Integration: http://www-hm.ma.tum.de/integration/course/html/ch2/t/t_parent.htm

b) Begleitendes Dreibein $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ (S. 219) !kart. Basis!

- Tangentialvektor: $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \vec{N}(t) \times \vec{B}(t)$



- Hauptnormalenvektor: $\vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$

- Binormalenvektor: $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)\|}$

- $\vec{T}(t) = \dfrac{1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix}$

- $\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 36t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\cdot 36t^2 + 6\cdot 18t^2 \\ -36t \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)\| = 6\sqrt{18^2 t^4 + 36t^2 + 1} = 6(1+18t^2)$

$\Rightarrow \vec{B}(t) = \dfrac{1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \dfrac{1}{(1+18t^2)^2} \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(1+18t^2)^2} \begin{pmatrix} -6t\cdot 18t^2 - 6t \\ -1 + 18^2 t^4 \\ 6t\cdot 18t^2 + 6t \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2 - 1 \\ 6t \end{pmatrix}$

c) Schmiegebene in $\vec{x}(t_0)$ wird aufgespannt $\vec{T}(t), \vec{N}(t)$; besitzt den Normalenvektor $\vec{B}(t)$

Parameterform: E_S: $\vec{x}_E = \vec{x}(t_0) + \lambda \vec{T}(t_0) + \mu \vec{N}(t_0)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Normalenform: $\vec{B}(t_0) \circ \vec{x}_E = \vec{B}(t_0) \circ \vec{x}(t_0)$ identisch mit $x_1 x_2$-Ebene

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 0}$$

d) Krümmung $\kappa(t) = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}(t)\|}{\dot{s}(t)} = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}(t)\|}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \dfrac{\|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)\|}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^3} = \dfrac{6(1+18t^2)}{(1+18t^2)^3} = \dfrac{6}{(1+18t^2)^2}$

Torsion $\tau(t) = \dfrac{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \circ \dddot{\vec{x}}}{\|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\|^2}$ ← Spatprodukt

zylindrische Helix $\dfrac{\tau}{\kappa} = \text{const}$

2. **Aufgabe**

Gegeben sei die Spiralkurve

$$\vec{\gamma}(t) = e^{-2t}(\cos t, \sin t)^\top, \quad t \in [0, \infty),$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve und bestimmen Sie die Umparametrisierung nach der Bogenlänge.

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = -2e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = -e^{-2t}\begin{pmatrix}2\cos t + \sin t\\ 2\sin t - \cos t\end{pmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| = \ldots = \sqrt{5}e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{\gamma}}(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{5}e^{-2\tau} d\tau = \sqrt{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^t = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Gesamtlänge} \quad L = \lim_{t\to\infty} s(t) = \int_0^\infty \|\dot{\vec{\gamma}}(\tau)\| d\tau = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Umparametrisierung nach der Bogenlänge

1) „neuer Laufparameter": Bogenlänge in Abh. von „alten" Parameter t $\qquad s = s(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$

2) nach dem „alten Parameter" t auflösen / Inverse bestimmen

$$s = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \Leftrightarrow \frac{2s}{\sqrt{5}} = 1 - e^{-2t} \Leftrightarrow e^{-2t} = 1 - \frac{2s}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow -2t = \ln\left(1 - \frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow t = s^{-1}(s(t)) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$$

3) Umparametrisieren / Einsetzen $\qquad \gamma(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$

$$\tilde{\vec{\gamma}}(s) := \vec{\gamma}(t(s)) = \vec{\gamma}(s^{-1}(s(t))) = \left(1-\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)\right) \\ \sin\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

! Parametrisierung nach der Bogenlänge führt dazu, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, d.h. $\|\dot{\tilde{\vec{\gamma}}}(s)\| = 1 \quad \forall s$

3. **Aufgabe**

Die Kurve $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))^\top$, mit Komponenten

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad \text{Tip: } \vec{\mu}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ddot{\mu} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = a\cos t \quad \text{und} \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

durchläuft eine Ellipse für $a, b > 0$. Bestimmen Sie die Punkte der Ellipse, an denen die Krümmung maximal ist.

Krümmung im $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{\|\dot{\vec{\gamma}} \times \ddot{\vec{\gamma}}\|}{\|\dot{\vec{\gamma}}\|^3}$

$$\|\dot{\mu} \times \ddot{\mu}\| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \end{pmatrix} \right\| = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|$$

Krümmung im $\mathbb{R}^2$: $\kappa(t) = \dfrac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}$

$$= \dots = ab\,(\underbrace{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}_{\alpha(t)})^{-3/2}$$

$$\kappa'(t) = ab\left(-\tfrac{3}{2}\right)\alpha(t)^{-5/2}\left[2\sin t\cos t\,(a^2 - b^2)\right]$$

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2\sin^2 t + \overbrace{a^2\cos^2 t - a^2\cos^2 t}^{0} + b^2\cos^2 t$$

$$= a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t$$