HM2 Blatt 13

LGS $A\vec{x} = 0$ homogen LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ inhomogen

IG

$F(x) - \int f(x)\,dx = 0$ $F(x) - \int f(x)\,dx = b(x)$

DGS

$\boxed{f(t, x, x') = 0}$

$f(t, x, x', x'') = 0$

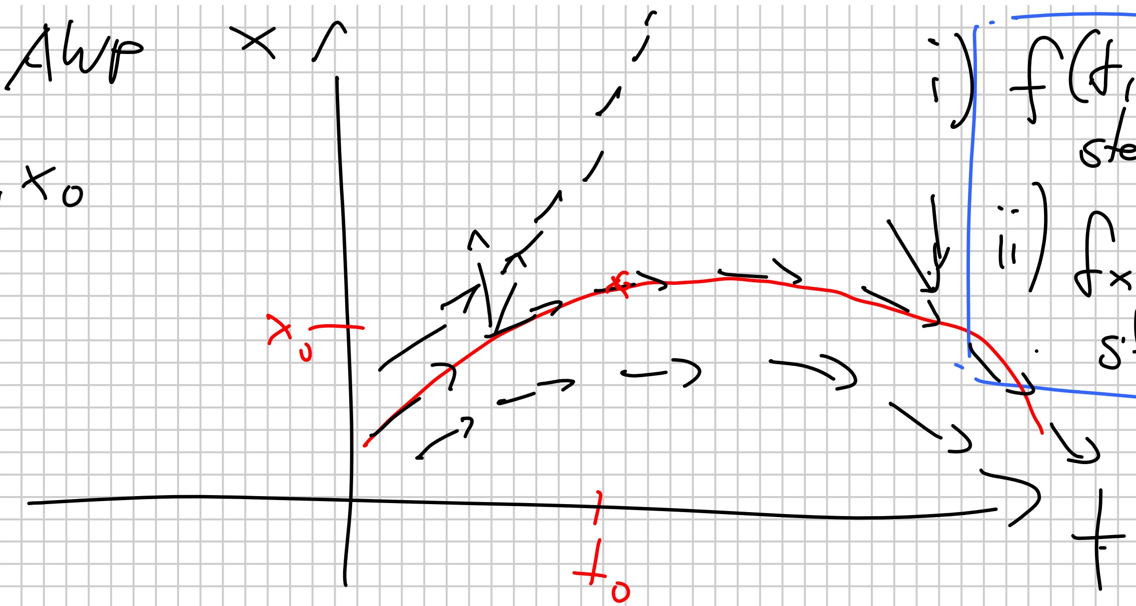
$\vdots$

Ex und Eindeutigkeit AWP

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x' = f(t,x) \qquad t_0, x_0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{=} f(t,x)$$

$$\Delta x \hat{=} f(t,x)\,\Delta t \qquad \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}$$



i) $f(t,x)$ stetig

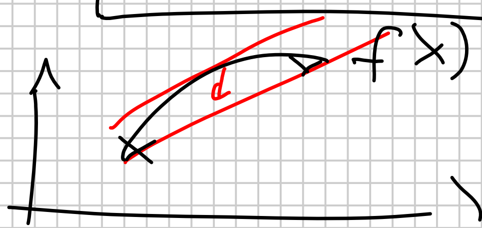
ii) $f_x(t,x)$ stetig

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| < L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in D \quad L \text{ fest}$$

MWS

x_1, x_2 ?

$$|f(\ ,x_1) - f(\ ,x_2)| = f_x(\xi)\,|x_1 - x_2| \qquad \xi \in [x_1, x_2]$$



Aufgabe 1:

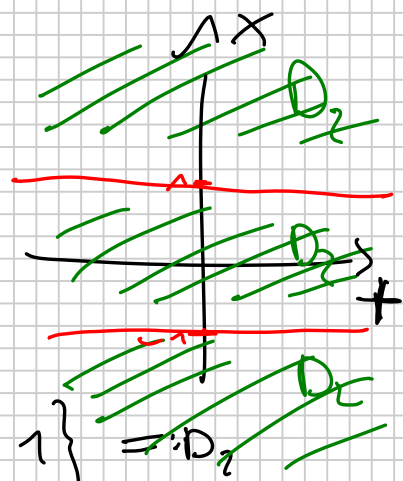
$$x' = \sqrt{|1-x^2|} = \underset{f(t,x(t))}{f(t,x)} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

i) f stetig?

f ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: D_1$

ii) f_x stetig?

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| \leq 1 \\[2ex] \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$



f_x ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} =: D_2$

i) + ii) $\Rightarrow$ f genügt in $D = D_1 \cap D_2$ einer lok. Lipschitzbed.

$\Rightarrow$ zu jedem $(t_0, x_0) \in D$ ex genau eine Lösung des AWP die sich bis zum Rand von D fortsetzen lässt

iii) AW in D?

$x(0) = 2 \neq \pm 1 \Rightarrow (t_0, x_0) \in D \Rightarrow$ ex. und eind.

Aufgabe 2: $t^2 x'' - 6tx' + 12x = 0$

DGL 2. Ordnung

$\Rightarrow \quad x'' = \frac{1}{t^2}(6tx' - 12x)$ $\quad t \neq 0$

Vorgehen: n-Ordnung

Def.:

$z_1 = x$

$\vdots \quad \vdots$

$z_n = x^{(n-1)}$

$\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ \text{DGL} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{1}{t^2}(6tz_2 - 12z_1) \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\vec{f}(t,\vec{z})}$

i) f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$

ii) f_z stetig $\quad J_{fz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{t^2} & \frac{6}{t} \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f genügt einer Lok L-Bedingung in $D := \{(t, \vec{z}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2\}$

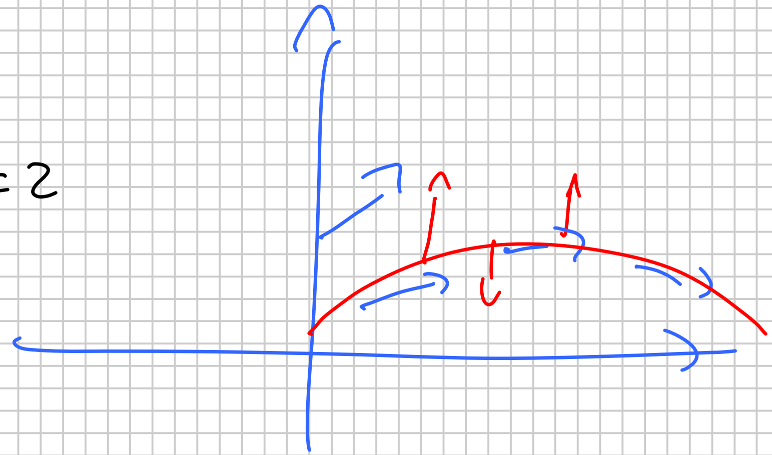
$\Rightarrow$ für jedes AWP mit $(t_0, z_0) \in D$ ex eine eind. Lsg in D

$\Rightarrow$ mit AW $\vec{z}(t_0) = \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ z_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$ mit $t_0 \neq 0$

Aufgabe 3:

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} = t^2 + 4 \qquad x(1) = 2$$

$$\boxed{x'(t) + a(t)\, x(t) = f(t)}$$



homogene DGL

$$x'(t) + a(t)\, x(t) = 0$$

$$x'(t) = -a(t)\; x(t)$$

i) homogene

$$x'(t) + \frac{1}{t}\, x(t) = 0$$

ii) seperabel

$$x'(t) = -\frac{1}{t}\; x(t) \qquad \text{seperabel}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}\, x(t)$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = -\int \frac{1}{t}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln x_h(t) = \underbrace{-\ln t}_{\ln t^{-1}} + \underbrace{\tilde{c}}_{\ln c} = \ln \frac{c}{t} \quad \Rightarrow \quad x_h(t) = \frac{c}{t}$$

iii) Variation der Konst.

<u>Ansatz</u> (*) $x_p(t) = \frac{c(t)}{t} \Rightarrow x_p'(t) = \frac{c'(t)}{t} - \frac{c(t)}{t^2}$

Einsetzen in inhomogene DGL

$$\frac{c'(t)}{t} - \cancel{\frac{c(t)}{t^2}} + \cancel{\frac{c(t)}{t^2}} = t^2 + 4 \Rightarrow c'(t) = t^3 + 4t \Rightarrow$$

$$c(t) = \frac{1}{4}t^4 + 2t^2 + C$$

Eine part Lösung ist

$$(*)\ x_p(t) = \left(\frac{1}{4}t^4 + 2t^2\right) \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{4}t^3 + 2 \cdot t$$

iv) Allg. Lsg

allg Lsg $\boxed{x(t) = x_p(t) + x_h(t)} = \frac{1}{4}t^3 + 2t + \frac{C}{t}$

v)

$\boxed{\text{AW: } x(1) = 2} = C + \frac{1}{4} + 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Lsg $x(t) = \frac{1}{4}t^3 + 2t - \frac{1}{4t}$

b) $$t\,x'(t) + 3x = -\frac{1}{t^2+1} \qquad x(1) = 0$$

$$x'(t) + \underbrace{\frac{3}{t}}_{a(t)}\,x = \underbrace{-\frac{1}{t^3+t}}_{f(t)}$$

Lösung

$$x(t) = \boxed{e^{-A(t)}}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \boxed{e^{A(\tau)}}\, f(\tau)\,d\tau\right) \quad (*)$$

mit $$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$$

i) $$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = \int_{1}^{t} \frac{3}{\tau}\,d\tau = 3\ln t = \ln t^3$$

$$e^{A(t)} = t^3 \qquad\qquad e^{-A(t)} = \frac{1}{t^3}$$

iii) Einsetzen in (*)

$$x(t) \; \circ\circ\circ \; = \frac{1}{t^3}\left[-T + t \arctan t + 1 - \frac{\pi}{4} \right]$$