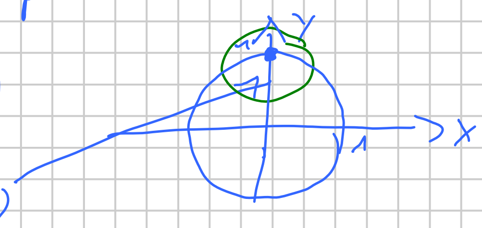
Kap 10.8 Implizite Funktionen (S. 160 f)

Bsp: $x^2 + y^2 = 1$



Problem: $y = f(x)$? $x = f(y)$?

Satz über implizite Funktionen S. 161

Sei $f \in \mathcal{C}^1(D \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, D offen und $f(x,y) = 0$ definiere Niveaumenge $N \subseteq D$. Sei $(x_0, y_0) \in N$ (d.h. $f(x_0, y_0) = 0$) und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

„Höhenlinien"

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0$, $f \in C^1$

z.B.: $f(0,1) = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓

$f_y(x,y) = 2y$, $f_y(0,1) = 2 \neq 0$

Dann gibt es *offene* Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ so, daß

(A) $Q := \{(x,y) | x \in I, y \in J\} \subseteq D$, $(x_0, y_0) \in Q$, $f_y(x,y) \neq 0 \, \forall (x,y) \in Q$

in einer offenen Umgebung Q von (x_0, y_0) ist $f_y(x,y)$ auch nicht 0! (keine vert. Tangente)

(B) Durch $f(x,y) = 0$ ist auf I eindeutig eine *differenzierbare* implizite Funktion $g : I \to J$ definiert.

Man sagt auch: Die Funktion $f(x,y)$ ist um (x_0, y_0) *lokal eindeutig* (durch die implizite Funktion $y = g(x)$) auflösbar.

also um $(0,1)$ ist $f(x,y)$ lokal eindt auflösbar nach y mit

$y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $I =]-1, 1[$

(kein $\pm$ wg Punkt $(0,1)$)

(C) Die Ableitung dieser Funktion lautet

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad \forall x \in I\,.$$

$f_x(x,y) = 2x$, $f_x(0,1) = 0$

$\Rightarrow g'(0) = -\frac{2 \cdot 0}{2} = 0$

1. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1 x_2} - 4x_2. \quad \in C^\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}(x_{10}, x_{20}) \in \mathbb{R}^2 \\ f(x_{10}, x_{20}) = 0\end{array}\right\} (x_{10}, x_{20}) \in N$$

$$f_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \neq 0$$

a) Zeigen Sie, dass durch $f(x_1, x_2) = 0$ eine Funktion $x_2 = g(x_1)$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ implizit definiert ist.

$$f(0,0) = 0 \cdot e^{-0} - 4 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \in \text{Niveaumenge } f(x_1,x_2) = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = \underbrace{-\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} \underbrace{e^{-x_1 x_2}}_{>0}}_{\leq 0} - 4 \;\underset{\neq}{<}\; 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Nach Satz über implizite Fkt ist f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ lokal eindt nach x_2 auflösbar, d.h. $x_2 = g(x_1)$; d.h. in jedem $x_1 \in \mathbb{R}$ ist durch $f(x_1, x_2) = 0$ die Fkt $x_2 = g(x_1)$ implizit definiert.

b) Berechnen Sie die Werte $g(0)$ und $g'(0)$. $\quad x_2 = g(x_1) \quad ; \quad g(x_1 = 0) = x_2 \; ?$

Es ist $f(\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{0}) = 0$, g ist eindt um $(0,0)$, also $g(0) = 0$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = e^{-x_1 x_2} - x_1 x_2 e^{-x_1 x_2} \qquad f_{x_1}(0,0) = 1 \qquad f_{x_2}(0,0) = -4$$

$$\Rightarrow g'(0) = -\frac{f_{x_1}(0,0)}{f_{x_2}(0,0)} = -\frac{1}{-4} = 1/4$$

Kap 11 (S. 167ff) EW und EV

EWP's $\longrightarrow$ $\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, λ EW, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\vec{v}$ EV zu λ

$\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\boxed{\vec{v} \neq \vec{0}}$

$\Longleftrightarrow$ homog LGS $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda E) =: V(\lambda)$ Eigenraum zum EW λ $(\dim \geq 1)$

$\Longleftrightarrow$ $p_A(\lambda) := \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$ charakter. Polynom

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lambda \text{ EW von } A \Longleftrightarrow \lambda \text{ NST von } p_A(\lambda)}$

2. Aufgabe

Eigenraum

Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren folgender Matrizen

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Satz: Schwesches Lemma

Δ-Matrix $\Rightarrow$ EW stehen auf Diag

a) 1. Schritt $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

2. Schritt $p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^{2}(3-\lambda)^{1} \overset{!}{=} 0$

3. Schritt NST $p_A(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2$ $\lambda_3 = 3$

$\lambda = 2$ hat alg. VFH 2 (doppelter EW) $\lambda = 3$ hat alg VFH 1 (einfacher EW)

4. Schritt EV's

$\lambda_{1,2} = 2$: $M := (A - 2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ZSF

$\text{rg}\, M = 2 \Rightarrow M$ singulär

$\Rightarrow \dim \text{Kern}\, M = \underset{n}{3} - \text{rg}\, M = 1$

geom. VFH

$\boxed{1 \leq \text{geom VFH} \leq \text{alg VFH} \leq n}$

LGS   Char Poly

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist <u>ein</u> EV zum EW 2 von A.

$\lambda_3 = 3$: $M := (A - 3E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist <u>ein</u> EV zum EW 3 von A

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ EW 0, 2 $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ EW 0, 0

b) $\chi_A(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda + 2)^2 \overset{!}{=} 0$ Faktorisieren!   <u>Polynomdivision</u>