1. **Aufgabe**

Welche der folgenden Matrizen ist diagonalisierbar? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

$$a)\ \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

d.h. $\exists D, S$ mit

$D = S^{-1} A S$

A diagbar $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^n$ besitzt Basis aus EV von A

$\Leftrightarrow$ alg VFH = geom VFH für jeden EW von A $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim V(\lambda_i) = n$

$\Leftrightarrow$ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n l.u. EV

Spezialfälle:

A sym $\Rightarrow$ diagbar

A normal ($A^H A = A A^H$)

$\Rightarrow$ diagbar

Spektralsatz S. 182

a) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ ist JNF (3-facher EW -8, $\dim V(-8) = 1$) $\Rightarrow$ nicht diagbar

JNF ist bis auf Permutation der Jordanblöcke eindt.! Diagmatrix ist eine spezielle JNF

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} = A^T$, A sym $\Rightarrow$ A diagbar (Satz S. 191)

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda E) = (8-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -(\lambda - 8)(\lambda - 3)(\lambda - 4) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzt 3 paarw. versch. EW $\Rightarrow$ alg VFH = geom VFH = 1 für jeden EW

oder nach Satz aus VL sind EV zu versch EW l.u. $\Rightarrow$ $\exists$ Basis aus EV $\Rightarrow$ diagbar

hinreichende Bed für diagbar: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n paarw. versch. EW $\Rightarrow$ A diagbar wg alg VFH = geom VFH = 1

2. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

reell sym $\Rightarrow$ orthog. diagbar, nur reelle EW

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine Basis der Eigenräume an.

EW: $p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -(1-\lambda)^2(5+\lambda) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = +1 \qquad \lambda_3 = -5$

EV: $\lambda = -5$: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & +5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Basis von $V(-5)$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Basis des $V(+1)$: $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

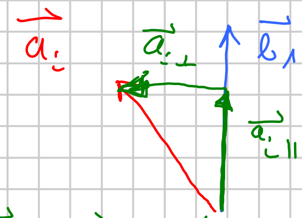
b) Bestimmen Sie weiterhin eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^\top AQ$ Diagonalform besitzt. EV's sind i.d.R. nicht orthog.

Kap 11.6.2. (S.189) Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Konstruktion einer ONB $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ für span$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots\}$ aus den „alten" Basisvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$

1) Wähle einen Basisvektor und normiere diesen

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$



$\vec{a}_i = \vec{a}_{i\perp} + \vec{a}_{i\parallel}$

$\tilde{\vec{e}}_2$

2) Wähle einen weiteren „alten" Basisvektor $\vec{a}_i$: zB $\vec{v}_2 = (2,0,-1)^T$

3) Finde den „Anteil" von $\vec{a}_i$, der zu allen bisherigen „neuen" Basisvektoren senkr. steht

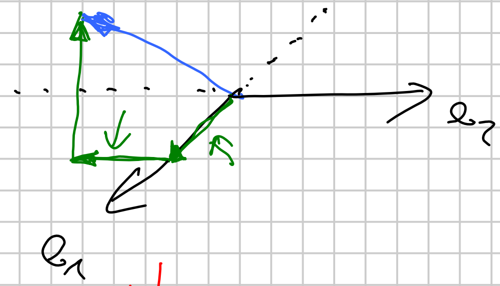
$$\tilde{\vec{e}}_2 = \underbrace{\vec{v}_2}_{\vec{a}_i} - \underbrace{\langle \vec{v}_2, \vec{b}_1\rangle \cdot \vec{b}_1}_{\vec{a}_{i\parallel}} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

4) Normiere diesen Vektor $\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\tilde{\vec{e}}_2\|}\tilde{\vec{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

5) Wiederhole 2)–4) so lange, bis die „neue" Basis vollst. konstruiert ist.

- $\vec{v}_3 = (1, 1, 2)^T$
- $\tilde{\vec{e}}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{b}_1\rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{b}_2\rangle \vec{b}_2$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$



EV's zu versch. EW stehen bei reell sym. Matrizen senkrecht!

- $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

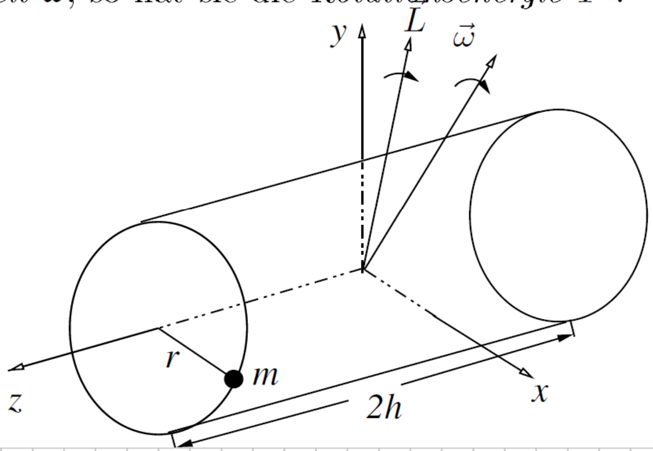
$$\Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix} \text{ mit } D = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -5\end{pmatrix}$$

3. **Aufgabe**

Eine zylindrische Schwungscheibe (Radius$=r$, Höhe$=2h$, Masse $=M$) hat am Rand eine punktförmige Unwucht der Masse m. Im (körperfesten) skizzierten Koordinatensystem lautet der Trägheitstensor

$$I := \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(3r^2+4h^2)+mh^2 & 0 & -mrh \\ 0 & \frac{M}{12}(3r^2+4h^2)+m(h^2+r^2) & 0 \\ -mrh & 0 & \frac{M}{2}r^2+mr^2 \end{pmatrix}.$$

Rotiert die Scheibe mit der (momentanen) *Drehgeschwindigkeit* $\vec{\omega}$, so hat sie die *Rotationsenergie* $T := \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I \vec{\omega}$ und den *Drehimpuls* $\vec{L} = I\vec{\omega}$.
Bei freier Bewegung ist $\vec{L}$ konstant und $\vec{\omega}$ rotiert um $\vec{L}$ (*Nutation*).



a) Für $r = h = 30\,cm$, $M = 1\,kg$, $m = 0,1\,kg$ und $\vec{\omega} = \vec{e}_3 \frac{1}{s}$ $[1/s]$ gebe man I, $\vec{L}$ und T an.

b) Man berechne die EW und EV von I mit den Werten aus (a). Für welche Richtungen der Drehachse $\vec{\omega}$, $\|\vec{\omega}\| = 1$, wird die Rotationsenergie maximal bzw. minimal?

a) $I = \begin{pmatrix} 615 & 0 & -90 \\ 0 & 705 & 0 \\ -90 & 0 & 540 \end{pmatrix}$ $[kg\ cm^2]$

$= 15 \begin{pmatrix} 41 & 0 & -6 \\ 0 & 47 & 0 \\ -6 & 0 & 41 \end{pmatrix} kg\ cm^2$

$\vec{L} = 90 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{kg\ cm^2}{s}$

$T = 270 \frac{kg\ cm^2}{s^2}$

b) $A = \begin{pmatrix} 41 & 0 & -6 \\ 0 & 47 & 0 \\ -6 & 0 & 36 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \alpha A \qquad \alpha A\vec{v} = B\vec{v} = \lambda\vec{v}$

A hat EW 32, 45, 47 $\qquad$ (I hat EW 480, 675, 705)

EV $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $D = \begin{pmatrix} 47 & & \\ & 45 & \\ & & 32 \end{pmatrix}$ $\qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

$A = Q D Q^T$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \underline{I}\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,15\cdot\vec{\omega}^T Q\, D \underbrace{Q^T\vec{\omega}}_{\vec{u}} = \frac{15}{2}\,\vec{u}^T D\,\vec{u} = \frac{15}{2}\left(47u_1^2 + 45u_2^2 + 32u_3^2\right)$$

Q orthog (längentreu!) $\Rightarrow \|\vec{\omega}\| = \|Q^T\vec{\omega}\| = \|\vec{u}\| \overset{!}{=} 1$

T am größten, wenn u_1 größter Anteil in $\vec{u}$, also $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow T_{max} = \frac{705}{2}\,\frac{kg\,cm^2}{s^2}$

T am kleinsten, wenn u_3 größten Anteil in $\vec{u}$, also $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow T_{min} = 240\,\frac{kg\,cm^2}{s^2}$

4. **Zusatzaufgabe**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme eine Hauptachsentransformation und gebe die dazugehörige Transformationsmatrix $Q := (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ an.