1. **Aufgabe**

Gegeben sei das parameterabhängige quadratische Polynom

$$p(x_1, x_2, x_3) = c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6x_1x_2 - 8x_2x_3 + 8x_1 + 6x_3 \quad \text{für } c \geq 0.$$

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

a) Schreiben Sie p in der Form $\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{a}^T \vec{x} + a_0$ mit symmetrischer Matrix A.

$$p(\vec{x}) = \vec{x}^T \begin{pmatrix} c & 3 & 0 \\ 3 & c & -4 \\ 0 & -4 & c \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}^T \vec{x} + \underline{0}$$

b) Bestimmen Sie die Normalform der Quadrik $p(x_1, x_2, x_3) = 0$ in Abhängigkeit vom Parameter c.

1) HAT 2) Trafo der lin Terme (quadrat. Erg) 3) Normierung [4) Typ]

1) EW: $p_A(\lambda) = (c-\lambda)^3 - 16(c-\lambda) - 9(c-\lambda) = (c-\lambda)(c+5-\lambda)(c-5-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = c \qquad \lambda_2 = c+5 \qquad \lambda_3 = c-5$

EV: $\lambda_1 = c \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

! gleich normieren wg ONB!

$\lambda_2 = c+5 \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = c-5 \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad Q = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3\sqrt{2} & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} c & & \\ & c+5 & \\ & & c-5 \end{pmatrix}$

2) Setze: $\vec{y} := Q^T \vec{x}$ Dann lautet $p(\vec{x})$ mit $A = QDQ^T$

$$p(\vec{x}) = (\vec{x}^T Q) D \underbrace{(Q^T \vec{x})}_{\vec{y}} + \vec{a}^T Q \underbrace{Q^T \vec{x}}_{\vec{y}} + a_0 = \boxed{\vec{y}^T D \vec{y} + \vec{a}^T Q \vec{y} + a_0 = p(\vec{y})}$$

$$a^T Q = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3\sqrt{2} & -4 & 4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\boxed{z_i := y_i + \frac{\alpha_i}{2\lambda_i} \quad \text{für } \lambda_i \neq 0}$$

$$\Rightarrow p(\vec{y}) = \underbrace{\overset{\lambda_i}{c}\, y_1^2} + (c+5)\, y_2^2 + (c-5) y_3^2 + \underbrace{\overset{\alpha_i}{10}\, y_1} = 0$$

Quadrat. Erg für y_1: $c\left(y_1^2 + \frac{10}{c} y_1\right) = c\underbrace{\left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{5}{c} y_1 + \frac{25}{c^2}\right)}_{z_1^2} - \frac{25}{c}$

$a^2 + 2ab + b^2$

$$\Rightarrow \vec{z} := \begin{pmatrix} y_1 + 5/c \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{falls } c \neq 0$$

3) $\Rightarrow p(\vec{z}) = c z_1^2 + (c+5) z_2^2 + (c-5) z_3^2 - \frac{25}{c} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{c}{25}$ „Normierung"

$$\boxed{\frac{c^2}{25} z_1^2 + \frac{c(c+5)}{25} z_2^2 + \frac{(c-5)c}{25} z_3^2 - 1 = 0}$$ Normalform für $c \neq 0$!

Fall $c = 0$ $\quad p(\vec{y}) = 5y_2^2 - 5y_3^2 + 10y_1$

$$= \boxed{5y_2^2 - 5y_3^2 - 2(-5)y_1 \overset{!}{=} 0}$$ Normalform für $c = 0$!

4) Fall $c=0$ $\quad \alpha x^2 - \beta y^2 - 2pz = 0$ hyperbolisches Paraboloid $\quad \alpha, \beta > 0$

Fall $c \neq 0$

$c > 5$	$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0$	Ellipsoid	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
$c = 5$	$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$	ellipt. Zylinder	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
$0 < c < 5$	$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid	$\alpha, \beta, \gamma > 0$

2. Aufgabe

$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$

Berechnen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie diese:

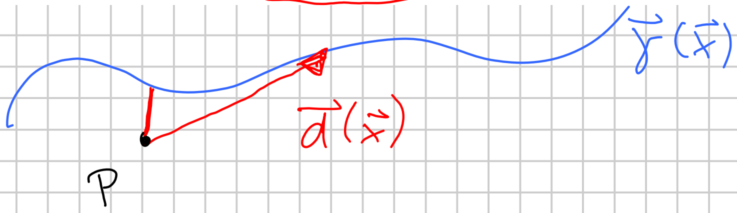
a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$ b) $f(x,y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$ c) $f(x,y,z) = -\ln(x^2+y^2+z^2+1)$

H_f ist $\begin{cases} \text{pos def} \iff \text{alle EW} > 0 & \Rightarrow \text{lok. Min} \\ \text{neg def} \iff \text{alle EW} < 0 & \Rightarrow \text{lok. Max} \\ \text{indef} \iff \text{es gibt EW} > 0 \text{ und EW} < 0 & \Rightarrow \text{Sattelpkt} \end{cases}$

b) $f(x, y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$

3. Aufgabe

Gegeben sei der Punkt $P = (0,1,0)$ und die Raumkurve $\vec{\gamma}(\vec{x})$ durch die Punkte $\{(x,y,z)^T \mid \overbrace{x^2 - y^2 = 2}^{NB1},\ \underbrace{z = y}_{NB2}\}$. Bestimmen Sie die Punkte auf der Raumkurve welche zu P den kürzesten Abstand haben.



$$\min_{\vec{x}} |\vec{d}(\vec{x})| \quad \text{unter } NB1,\ NB2$$

$$\Rightarrow \min_{\vec{x}} \left(d_1^2(\vec{x}) + d_2^2(\vec{x}) + d_3^2(\vec{x}) \right)$$

· Abstandsvektor von bel. Raumpkt $\vec{x}$ zu P: $\vec{d}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \min_{\vec{x}} \underbrace{\left(x^2 + (y-1)^2 + z^2 \right)}_{f(\vec{x})}$$

unter $NB1$: $g_1(\vec{x}) = x^2 - y^2 - 2 = 0$

und $NB2$: $g_2(\vec{x}) = y - z = 0$

- Lagrange Ansatz: $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \mu g_2(x,y,z)$

Bed. für Extrema

$2x(1+\lambda) = 0$

1) $L_x = f_x + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial x} = 2x + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0$

2) $L_y = f_y + \lambda \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial y} = 2(y-1) - 2\lambda y + \mu \stackrel{!}{=} 0$

3) $L_z = 2z - \mu \stackrel{!}{=} 0$

4) $L_\lambda = g_1(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0$

$\nabla g_1(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\nabla g_2(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

5) $L_\mu = g_2(x,y,z) = \quad y - z \quad \stackrel{!}{=} 0 \quad \leftarrow 1$

Fall 1: $x = 0$

Fall 2: $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$x = \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \qquad y = z = \frac{1}{3}$

4. **Zusatzaufgabe**

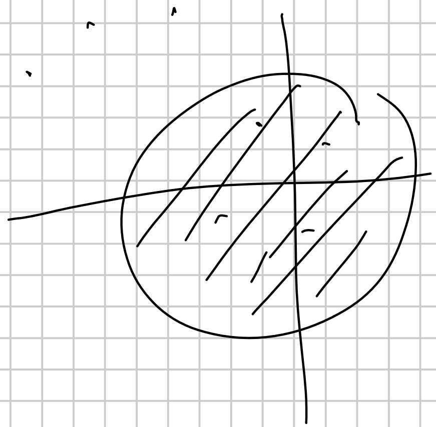
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

auf der Menge

$$B = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Untersuchung der Funktion auf dem Rand von B den Ansatz mit Lagrange-Multiplikatoren.



1) Extrema im Inneren $\nabla f = 0$ $\quad H_f$?

2) Extrema am Rand $\quad f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ mit $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$

$= \underline{x^2} - 2x + 1 + \underline{y^2} = 5 - 2x =: g(x)$

Satz
Sei $f, g \in C^1(D \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, D offen. Zu jeder Lösung $\vec{x}_0$ des Extremalproblems

$$f(\vec{x}) = \text{ Extremum! } \quad \wedge \quad \text{NB. } \; g(\vec{x}) = 0$$

mit grad $g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ gibt es eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (*Lagrange-Multiplikator*) so, daß gilt

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) + \lambda_0 \cdot \text{grad } g(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

S. 204