11.3 Eigenschaften EW/EV (S.172-180)

- Grundlegendes Theorem
- Ähnlichkeitstrafo
- Diagbarkeit
- Spezielle Matrizen (transponiert, hermitesch konj, symm, schiefsym, hermitesch, orthog, unitär, normal)
- unitär / orthog Trafo
- EW/EV's bei spez Matrizen / Trafos / ...

11.4 Pos def (S.181)

- pos def
- EW
- mehr Eig
- Notw. Bed.

11.5 Schursches Lemma / HV's (S.182-187)

- Schursches Lemma (unitär trafo auf ∇-Matrix)
- diagbark. normaler Matrizen
- HV's k-ter Stufe
  Basis aus HV's
- Berechnung HV's, Anwendungen
- Jordan-Normal-Form (JNF)

1. **Aufgabe**

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix um die Matrix A zu diagonalisieren (Hinweis: $\lambda_1 = -3$).

Trafo zu Diagonalmatrix:

Suche $S, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$\boxed{A = SDS^{-1}}$, $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$

S. 177

Satz: Wenn A n l.u. EV's besitzt, dann A diagbar mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

(d.h. alg VFH = geom VFH für jeden EW!)

Schritt 1: EWs von A

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \dots = -(\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45) \overset{!}{=} 0$$

check: $p_A(-3)$

Polynomdivision:

$$(\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45) : (\lambda + 3) = \lambda^2 - 2\lambda - 15 \overset{!}{=} 0$$

$-2\lambda^2$ $\quad -15\lambda$

check: Rest

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -3 \\ \lambda_3 &= 5 \end{aligned}}$$

Schritt 2: EV's und ggf HV's

$\lambda_3 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +3\mathrm{II}-\mathrm{III} \\ :2 \\ \cdot 2+\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & -16 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = -3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: M$ 	$\operatorname{rg} M = 1 \Rightarrow \dim V(-3) = 2$ 	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 3: Aufstellen von S und D

$$D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{matrix} \end{array} \qquad S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{matrix} \end{array}$$

check: $SDS^{-1} = A$
$\Longleftrightarrow$ $SD = AS$

Reihenfolge EWs in D $\hat{=}$ Reihenfolge der zu den EW's gehörenden EVs in S !

b) Berechnen Sie die Matrixfunktion $\cos(A) := 1 - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \frac{1}{6!}A^6 + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}$

$A = SDS^{-1}$; $A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$; $\frac{1}{k!}A^k = S\left(\frac{1}{k!}D^k\right)S^{-1}$

$D^k = (\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$

$$\cos A = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} D^{2k}\right) S^{-1} \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} D^{2k} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \lambda_1^{2k}}_{\cos \lambda_1}, \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \lambda_2^{2k}}_{\cos \lambda_2}, \ldots, \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \lambda_n^{2k}}_{\cos \lambda_n}\right)$$

$$\Longrightarrow \cos A = S \begin{pmatrix} \cos(-3) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-3) & 0 \\ 0 & 0 & \cos 5 \end{pmatrix} S^{-1} = \cos(-3)\, S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} + \cos(5) \cdot S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Inverse von S:

$$(S \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/8 & -4/8 & -6/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 2/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 2/8 & -3/8 \end{array}\right) \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\qquad\quad E \qquad\qquad\qquad S^{-1}$$

$$\Rightarrow \cos A = \cos(-3)\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \cos(5)\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\cos(-3)}{8}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \frac{\cos 5}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\cos(A)$.

$$\cos A = S \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-3) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-3) & 0 \\ 0 & 0 & \cos 5 \end{pmatrix}}_{M} S^{-1}$$

; $\cos A$ ist ähnlich zu M (Diagm.)

$\Rightarrow$ $\cos A$ und M haben dieselben EW

Bei Diagmatrix stehen EW auf Diag

$\Rightarrow$ $\cos A$ hat die EW $\mu_{1,2} = \cos(-3)$, $\mu_3 = \cos 5$

Hauptvektoren

Definition: Hauptvektor S. 183

Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ heißt *Hauptvektor der Stufe k* zum EW λ der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, falls

$$(A - \lambda\mathcal{E})^k \vec{v} = \vec{0} \quad \wedge \quad (A - \lambda\mathcal{E})^{k-1}\vec{v} \neq \vec{0}$$

D.h. $k=1$: $(A-\lambda E)^1 \vec{v} = (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \underbrace{A\vec{v} = \lambda E\vec{v} = \lambda\vec{v}}_{\text{EW-EV-Gleichung!}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{EV's sind HV's 1. Stufe!}}$

Satz

Zu jedem k-fachen EW λ der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es k linear unabhängige Hauptvektoren,* d.h.

$$\dim\{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | (A - \lambda\mathcal{E})^k\vec{x} = \vec{0}\} = k\,.$$

* höchstens k-ter Stufe!

Wenn diagonalisierbar: Basis ausschließlich aus HVs 1. Stufe/EVs

Eigenraum $V(\lambda) = \ker(A-\lambda E) \subseteq \ker\left[(A-\lambda E)^k\right]$

Berechnung der HV's (S. 184) zu k-fachem EW.

1) EV's berechnen (d.h. $V(\lambda)$) Falls $\dim V(\lambda) = k$: fertig. Sonst 2)

2) HV 2. Stufe berechnen

a) Wenn $V(\lambda) = \{\alpha\vec{v}, \alpha\in\mathbb{R}\}$; $\dim V(\lambda) = 1$ (nur 1 l.u. EV gefunden): Löse $(A-\lambda E)\vec{w} = \overset{\text{„einziger EV"}}{\vec{v}}$; $\vec{w}$ HV 2. Stufe

b) $\dim V(\lambda) \geq 2$: Löse $(A-\lambda E)\vec{w} = \vec{v}$, wobei $\vec{v}$ ein <u>allg</u> EV ist! $\vec{w}$ ist HV 2. Stufe.

3) HV 3. Stufe und höher:

Löse $(A-\lambda E)\vec{u} = \vec{w}$, $\vec{w}$ ist HV 2. Stufe, $\vec{u}$ ist HV 3. Stufe

Aufbau Jordanmatrix (JNF) und zugh. Trafomatrix

- JNF hat Blockdiagonalgestalt, bestehend aus Jordanblöcken

  Jordanblock J_i mit EW λ_i: λ_i auf Diagonale, 1 auf 1. Nebendiagonale, Rest 0

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\lambda_1} & & & \\ & & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & & \lambda_2 \ddots & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & 1 \\ & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Jordanblöcke pro EW λ = geom. VFH von λ

Größe des Jordanblocks: # EV's mit zugeh. HV's

[Genauer: $a_i := \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda E)^i$, # Jordanblöcke der Größe i : $2a_i - a_{i-1} - a_{i+1}$ ($2 \le i \le k$); $a_1 =$ geom VFH; $a_k = k =$ alg VFH; $a_{k+1} = a_k = k$]

Summe der Größen aller Jordanblöcke zum gemeinsamen EW λ = alg VFH von λ

- Trafomatrix: Reihenfolge der Jordanblöcke zu den EWs λ_i muss mit der Reihenfolge der zu den EW's gehörigen EV's (inkl. zugehöriger HV's) in der Trafomatrix übereinstimmen

z.B.: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{pmatrix}$

EV zu λ ← HV 2. Stufe ← HV 3. Stufe

$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

$S = \left(\begin{array}{ccc:c} v_{11} & w_1 & u & v_{21} \\ v_{12} & w_2 & u_2 & v_{22} \\ v_{13} & w_3 & u_3 & v_{23} \\ v_{14} & w_4 & u_4 & v_{24} \end{array}\right)$

EV1 ← HV_2 ← HV_3; EV2

$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \mu & 1 \\ & \mu \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$S = \left(\begin{array}{cc:cc} v_1 & w_1 & s_1 & t_1 \\ v_2 & w_2 & s_2 & t_2 \\ v_3 & w_3 & s_3 & t_3 \\ v_4 & w_4 & s_4 & t_4 \end{array}\right)$

EV zu λ ← HV_2; EV zu μ ← HV_2

2. **Aufgabe**

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Man berechne alle Eigenwerte und Eigen- bzw. Hauptvektoren der Matrizen.
- Man bestimme die Jordan-Normalform der Matrizen und gebe jeweils eine zugehörige Transformationsmatrix an.

a) Schritt 1: EW

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)+2\right] + [\underbrace{1-4}_{-3}+\lambda] = (3-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + \underbrace{8+2-1}_{9}] = -(\lambda-3)^3 \overset{!}{=} 0$$

Schritt 2: EV zu $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(3) = \left\{ \alpha \vec{v} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Schritt 3: HV's

1\. Stufe: Löse $(A-3E)\vec{u} = \vec{v} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; eine Lösung ist zB $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

HV$_2$ EV

2. Stufe: Löse $(A-3E)\vec{w} = \vec{u} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ eine Lsg ist z.B $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

HV_3 HV_2

Schritt 4: JNF und Trafomatrix

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec{v} & \vec{u} & \vec{w} \\ EV & HV_2 & HV_3 \end{array} \end{array}$$

nur $\underline{1}$ Block für $\lambda = 3$, da
$\dim V(3) = \underline{1}$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 0-\lambda & 0 \\ \hline -2 & 1 & 2-\lambda \end{array}\right) =: A - \lambda E$ **Blockmatrix**

$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$

EV: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(2) = \left\{ \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ Eigenraum

$\dim V(2) = 2$

$\Rightarrow$ 2 Jordan Blöcke!

HV: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \alpha \\ 4 & -2 & 0 & 2\alpha \\ -2 & 1 & 0 & \beta \end{array}\right)$ ← allg EV

$\xrightarrow[\Rightarrow \alpha = -\beta]{I \Leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

z.B. $\alpha = -1$

$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist HV 2. Stufe zum EV $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ des EW $\lambda = 2$

JNF:

$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Block bzgl $\vec{v}$ und $\vec{w}$ — Block zu weiterem EV

$S = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v}_1$ oder $\vec{v}_2$

! dieser EV muss l.u. zu $\vec{v}$ sein!

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Δ-Matrix! $\Rightarrow$ EW $\lambda_{1,2} = 1$ $\lambda_{3,4} = 2$

EVs: $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ zwei l.u. EV's sind $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 2 Blöcke

EVs: $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow V(2) = \left\{ \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_3}} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ 1 Block

HV: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right)$

$S = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\text{zu } \lambda = 1} & \multicolumn{2}{c}{\text{zu } \lambda = 2} \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} & \vec{w} \end{array}\right)$

3. **Zusatzaufgabe**

Gegeben seien die beiden folgenden Matrizen

$$a)\quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Δ-Matrix

- Man berechne alle Eigenwerte und Eigen- bzw. Hauptvektoren der Matrizen.
- Man bestimme die Jordan-Normalform der Matrizen und gebe jeweils eine zugehörige Transformationsmatrix an.

a) $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -6 & 5 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda-3)^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \quad \lambda_3 = -3$

<u>EVs:</u> $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(3) = \left\{ \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

HV $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -6 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right)$ z.B. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>EVs</u> $\lambda = -3$ $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad J = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ \hline & & -3 \end{array}\right) \qquad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2,3,4} = 2$$

EVs:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(2) = \left\{ \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ 3 Jordan Blöcke

(2, 1, 1)

HV:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -6 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{l} \} \ \alpha = -2\beta \\ \} \Rightarrow \gamma = 0 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(allg EV)

$\beta = 1 \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist HV_2 zum EW $\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ $\Rightarrow$ 2er Block

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{v} & \vec{w} & \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \end{array}$$